20/10/15

(*) Bernoulli : $y' + a(x)y = b(x)y^r$, $r \neq 0, 1$

$\rightsquigarrow z = y^{1-r}$

Π.χ.

Λογιστική Εξίσωση

$y' = y(b - cy)$, $c, b > 0$

$\Rightarrow y' = by - cy^2$

$\Rightarrow \boxed{y' - by = cy^2}$ (Bernulli)

Οι εξισώσεις Bernoulli δέχονται τη μηδενική λύση

Προφανής λύση: $y = \frac{b}{c}$

$r = 2 \Rightarrow z = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{y}} \Rightarrow \boxed{z' = -\frac{1}{y^2}}$

Η εξίσωση γράφεται: $\frac{y'}{y^2} - b\frac{1}{y} = c \Rightarrow$

$\Rightarrow -z' - bz = c \Rightarrow z' + bz = c \Rightarrow$

$\Rightarrow z(x) = e^{-\int_0^x b\,ds}\left[y(0) + \int_0^x (+c)\, e^{\int_0^s b\,du}\, ds\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow z(x) = e^{-bx}\left[y(0) + \int_0^x c e^{bs} ds\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow z(x) = e^{-bx}\left[y(0) + c\frac{1}{b}(e^{bx} - 1)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{e^{-bx}\left[y(0) + \frac{c}{b}e^{bx} - \frac{c}{b}\right]}$, $x \geq 0$

(i) αν $y(0) > 0 \Rightarrow y(x) > 0$, $\forall x \geq 0$

Πράγματι $b > 0 \Rightarrow e^{bx} \geq e^0 = 1$

$y(0) \geq 0$

$e^{-bx} > 0$

$\Rightarrow \boxed{y(x) > 0, \ \forall x \geq 0}$

ii) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{b}{c}$

$$y(x) = \frac{1}{y(0)e^{-bx} + \frac{c}{b} - \frac{c}{b}e^{-bx}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{0+\frac{c}{b}-0} = \frac{b}{c}$$

**A-11 λυμένη**: $q(x)\,y' = y\,q'(x) - y^2,\ y(0)=1,\ q\in C^1(\mathbb{R}),\ q(0)=1.$

$$\Rightarrow y^2 = q'(x)y - q(x)y' \Rightarrow 1 = \left(\frac{q(x)}{y}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+c = \frac{q(x)}{y} \Rightarrow y(x) = \frac{q(x)}{x+c}$$

$y(0)=1$ $\Rightarrow \boxed{c=1} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{q(x)}{x+1}}$

άρα $\Pi.O._y = (-\infty,-1)$ ή $(-1,+\infty)$

εφ' όσον έχω $y(0)=1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Pi.O._y = (-1,+\infty)$

**ΘΕΜΑ 3 (Σεπτ. 2015)**

$$2y' + x\sin(2y) + 2x(\tan y)(\sin y)^2 = 0 \quad y(0)=c$$

$\rightsquigarrow z = \tan y \rightsquigarrow$ Bernoulli (A-12) λυμένες.

α) Να βρεθεί η λύση

b) $y_0$: λύση με $y_0(0) = 9\pi/4$ κ' συμπεριφορά στο $+\infty$.

(c) ∃ λύσεις με : (α) $y_0(0) = \pi/2$, (b) $\lim_{x\to\infty} y(x) = \pi/2$, (c): $\lim_{+\infty} y(x) = 2015$

* Riccati : $y' + \alpha(x)y + b(x)y^2 + d(x) = 0$, με $d(x), b(x) \neq 0$

(αλλιώς έχω α' τάξης ή Bernoulli)

Τη λύνω ξέροντας μια λύση. $y_1$ μερική λύση $\rightsquigarrow y = y_1 + \frac{1}{z}$

**Άσκηση 5.8 iii (άλυτες)** : $y' - y + e^{-x}y^2 = 4e^x$

$y_1 = k e^{\lambda x}$

έχουμε : $k\lambda e^{\lambda x} - ke^{\lambda x} + e^{-x}k^2e^{2\lambda x} = 4e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{\lambda x}\left[k\lambda - k^2 + k^2e^{-x}\right] = 4e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow k\lambda - k + k^2e^{(\lambda-1)x} = 4e^{x(\lambda-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{k\lambda - k}_{\text{σταθερό}} = \underbrace{(4-k^2)\,e^{(1-\lambda)x}}_{\text{σταθερό}}$ $\Rightarrow$

$\longrightarrow$

$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow 0 = 4 - k^2 \Rightarrow \boxed{k = \pm 2}$

άρα $y_1 = 2e^x$ ή $y_1 = -2e^x$

β' τρόπος

$x=0 \Rightarrow k\lambda - k + k^2 = 4$

$x=1 \Rightarrow k\lambda - k + k^2 e^{\lambda-1} = 4e^{-1+\lambda}$ Σύστημα...

άρα έχουμε το μετασχηματισμό: $y = 2e^x + \frac{1}{z}$

$\cancel{2e^x} - \frac{z'}{z^2} - \cancel{2e^x} - \frac{1}{z} + e^{-x}\left(4e^{2x} + \frac{1}{z^2} + 4\frac{e^x}{z}\right) = 4e^x \Rightarrow$

$\cdot z^2$

$\Rightarrow -z' - z + z^2 e^{-x}\left(4e^{2x} + \frac{1}{z^2} + 4e^x \cdot \frac{1}{z}\right) = 4e^x z^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -z' - z + \cancel{4z^2 e^x} + e^{-x} - 4z = \cancel{4e^x z^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow z' - 3z - e^{-x} = 0 \Rightarrow \boxed{z' - 3z = e^{-x}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 2e^x + \frac{1}{e^{3x}\left(y(0) + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}e^{-x}}}$$

## Χωριζομένων Μεταβλητών

$y' = \frac{P(x)}{Q(y)} \Rightarrow Q(y)y' = P(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)} \Rightarrow Q(y)dy = P(x)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int Q(y)dy = \int P(x)dx \xrightarrow[\text{Για ορισμένη}]{} \int_{y(a)}^{y(x)} Q(y)dy = \int_a^x P(s)ds$

$x \in I$, $x_0 \in I$ $\Rightarrow \int_{x_0}^{x} Q(y(s))\,y'(s)ds = \int_{x_0}^{x} P(s)ds$

$u = y(s) \Rightarrow \frac{du}{ds} = \frac{dy(s)}{ds} = y'(s)$

$y'(s) = \frac{du}{ds} \Rightarrow y'(s)ds = du$

$s \to x_0 \rightsquigarrow u = y(x_0)$

$s \to x \rightsquigarrow u = y(x)$

άρα $\int_{y(x_0)}^{y(x)} Q(u)\,du = \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds$ / $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)} \Rightarrow Q(y)dy = P(x)dx.$

$\int_{y_0}^{y} Q(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} P(s)\,ds$ /

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2, σελ 38

$2x(y^2+y)dx + (x^2-1)\,y\,dy = 0$ , Προφανώς $y=0$, $y=-1$.

$\Rightarrow 2x(y^2+y)dx = (1-x^2)\,y\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2x}{1-x^2}dx = \frac{y}{y^2+y}dy \Rightarrow \int \frac{2x}{1-x^2}dx = \int \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}(y+1)}dy \Rightarrow$

$\Rightarrow -\int \frac{(1-x^2)'}{1-x^2}dx = \int \frac{1}{y+1}dy + c \Rightarrow \log|1+y||1-x^2| = c \Rightarrow$

διάφορα λύση. $\Rightarrow (y+1)(1-x^2) = \pm e^c \Rightarrow y = -1 + \frac{C}{1-x^2}$ , $x \neq -1, 1$

περιέχεται

$y=0$ , $y=-1$ , $y = -1 + \frac{C}{1-x^2}$ , $C \in \mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}$ , $x \in \mathbb{R}$ , $x < -1$ ή $x \in (-1,1)$ ή $x > 1$

Παρ. 3 σελ. 38 | $(y^2-1)dx + y(x-1)^2 dy = 0$ (χωρίζ. μεταβ.)

$y(0) = -2$ . // $y = \pm 1$ λύσεις αλλά απορ. διότι $y(0)=-2$.

$(x-1)^2(y^2-1) = \pm e^{2c} = C$

$y^2 - 1 = \frac{C}{(x-1)^2} \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{1 + \frac{C}{(x-1)^2}}}$

$y(0) = -2 \Rightarrow \boxed{C=-3}$ άρα $y(x) = -\sqrt{1 + \frac{3}{(1-x)^2}}$

άρα Π.Ο. : $x \in (-\infty, +1)$ διότι $y(0) = -2$.